

**Баришич Л.М.**

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

**Баклан І.В.**

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

## ВИКОРИСТАННЯ РЕПЛІКАТОРНОЇ ДИНАМІКИ В ІГРАХ ЗІ ЗВОРОТНІМ ЗВ'ЯЗКОМ ЯК МОЖЛИВИЙ РОЗВИТОК КОЕВОЛЮЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ ІГОР

*У наданій публікації було проаналізовано існуючі дослідження використання коєволюційної теорії ігор в контексті аналізу проблем біології на прикладі гри «голуб-яструб». В контексті вакцинації, було оглянуто розроблену модель осцилюючої еволюційної гри «трагедії спільноти». Оглянуто вектори використання подібних моделей для аналізу поведінки бактеріологічних культур.*

*Запропонована модель реплікаторної динаміки для ігор зі зворотнім зв'язком розглядає наслідки повторення, коли повторювані дії гри впливають на середовище. У таких повторюваних іграх виникають стратегії, які включають співпрацю, навіть якщо співпраця в іншому випадку є програшною в одноетапній або однокерованій версії гри. В оглянутій системі окремі агенти не грають один проти одного багаторазово або, кажучи по іншому, не “згадують”, як неодноразово грали проти один проти одного. Натомість гра, що розвивається із зворотним зв'язком, змінюється з часом як прямий результат накопичених дій агентів. До цього часу ми припускали, що навколишнє середовище може відновитися з майже виснаженого стану. Швидкість поновлення вважалася пропорційною частці кооператора. У цьому сенсі наша робота також вказує на нові можливості контролю – чи відновлення, чи обмеження ресурсів.*

*У цій публікації буде оглянуто єдиний підхід до аналізу та розуміння ігор, що розвиваються із зворотним зв'язком. Цей підхід називається винахідниками «коєволюційною теорією ігор», що позначає пов'язану еволюцію стратегій та середовища. Ключовою концептуальною інновацією цього підходу є розширення динаміки реплікатора, включаючи динамічні зміни навколишнього середовища. У цьому сенсі розглянутий підхід доповнює нещодавні спроби розглянути еволюцію виплат у фіксованому середовищі. Тут зміни в середовищі модулюють виплати. З таким припущенням, ми можемо аналізувати задачі, в яких індивідуальна поведінка агента є невід'ємним компонентом системи. Для вивчення конкретного випадку ми повертаємося до трагедії, що виникла у прикладі загального користування, і запитуємо: що станеться, якщо надмірне використання ресурсу змінить стимули для майбутніх дій гравців? Як було показано дослідниками, накопичений зворотний зв'язок з рішеннями може згодом змінити виплати, що призведуть до нових динамічних явищ та нових викликів для контролю.*

**Ключові слова:** теорія ігор, трагедія обшин, еволюційні ігри, коєволюція, реплікаторна динаміка.

**Постановка проблеми.** Одна з ключових проблем класичної теорії ігор полягає в тому, що гравці максимізують свою нагороду не зважаючи на глобальний максимум, що може бути досягнутий спільними зусиллями. Подібне явище ілюструє Трагедія спільного – ситуація з надмірним використанням суспільного блага що призводить до повного вичерпання ресурсів.

У цій публікації буде адресована та проаналізована проблема передбачення стану системи при припущенні раціональної поведінки агентів та зміни поведінки агентів при наблизенні до “спустошення” та “наповнення” системи.

З точки зору практичного використання, моделювання систем на основі циклічного реплікатора дозволяє зручніше виражати і досліджувати задачі де середа може впливати на зміну стратегій агентів.

Поєднання еволюційного да кооперативного підходу до теорії ігор дозволяє моделювати складні волатильні висококонкурентні системи (фінансові ринки чи епідеміологія, наприклад).

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Коопераційні та коєволюційні ігри зростають у популярності у роботах стосовно еволюційної біології та економіки.

Ключове дослідження для цієї публікації – “An oscillating tragedy of the commons in replicator dynamics with game-environment feedback”, було опубліковано в листопаді 2016 року [1].

Це дослідження буде виділяє та характеризує новий клас коеволюційних ігор – осцилюючу трагедію спільноти та пропонує нові напрямки вивчення ігор де дії агентів мають вплив на середовище.

Також розвиток теорії ігор активно рухається у напрямку поєднання еволюційного та коаліційного підходів [2]. Коаліційно-еволюційна гра моделює ситуацію, де при еволюційній грі споглядається суперадитивність нагороди.

При цьому розглядається дві гри, де коаліція розглядається як агент в еволюційній грі, а гравець – як агент в коаліційній [2].

**Формулювання цілей статті.** Мета публікації полягає в аналізі існуючої літератури і останніх досліджень та виділення основних векторів розвитку коеволюційної теорії ігор в контексті аналізу проблем розподілу дивідентів, трагедії спільноти та вакцинації.

У цій роботі буде розглянута реплікаторна динаміка для коеволюційної гри зі зворотнім зв'язком. Будуть досліджені коливання точки рівноваги агентів, що кооперуються.

**Викладення основного матеріалу дослідження.** Один із шляхів аналізу та подолання Трагедії спільного полягає у застосуванні еволюційної теорії ігор та модифікації реплікаторної динаміки до стану осциляції між станами “наповнення” та “спустошення”.

Теорія ігор ґрунтується на принципі, згідно з яким агенти обирають дії раціонально в контексті певних стимулів. На практиці стимули представлені у вигляді виплат, що залежать від обраної агентом стратегії. Еволюційна теорія ігор поширює теоретичні принципи гри на моделювання систем з динамічною зміною стратегій. Реплікаторна динаміка є однією з найчастіше використовуваних методологій побудови таких моделей [1]. При використанні рівняння реплікаторної динаміки частота зміни стратегій змінюються як функція соціального складу спільноти. Наприклад, у грі зі сніговими заметами (також відома як гра «яструб-голуб»), люди вибувають, коли кооперація між гравцями поширена, але вимушені співпрацювати, коли кооперація відсутня або рідкісна. Як наслідок, передбачається, що співпраця збережеться між часткою громади. Тоді як у дилемі ув'язненого окремі особи стимулюються до утримання від активних дій незалежно від поширен-

ності кооперації. Це призводить до панування «утримання».

Тут нас цікавить інший вид еволюційної гри, в якій індивідуальна дія змінює як соціальний склад, так і контекст середовища для подальших дій. Зворотній зв'язок, що залежить від стратегії, існує у всіх масштабах – від мікробів до людей у суспільних іграх та у дилемах ресурсів загального користування [3]. Серед мікробів зворотний зв'язок може виникнути через фіксацію неорганічних поживних речовин з огляду на виснаження запасів органічних поживних речовин, виробництво позаклітинних ферментів, що поглинають поживні речовини, таких як сидерофори, або ферментів, таких як інвертаза, що гідролізують дифузійні продукти, та вивільнення позаклітинних сполук антибіотиків [4]. Для суспільного блага виробництво змінюється, оскільки виробництво впливає на стан навколишнього середовища. Такий спільний вплив відбувається в людських системах, наприклад, коли люди вирішують робити вакцинацію чи ні [5]. Рішення не робити вакцинацію останнім часом пов'язують із спалахами дитячих інфекційних захворювань, які можна запобігти, у Північній Каліфорнії. Ці спалахи змінюють подальші стимули до вакцинації. Такі сполучені відгуки також виникають у дилемах щодо суспільних благ, що стосуються використання води чи інших ресурсів. У період поповнення ресурсів менше стимулів для стриманості. Однак надмірне використання в період повної доступності ресурсів може призвести до виснаження ресурсу та зміни стимулів [5].

**Модель еволюційної гри з реплікаторною динамікою зі зворотнім зв'язком.**

Ми розглядаємо модифіковану версію стандартної реплікаторної динаміки, де:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) [r_1(x, A(n)) - r_2(x, A(n))], \\ \dot{n} &= n(1-n) f(x) \end{aligned} \quad (1)$$

У формулі  $f(x)$  позначає зворотний зв'язок гравців з навколишнім середовищем і додаток  $n(1-n)$  гарантує, що стан навколишнього середовища обмежений областю  $[0,1]$ . Значення  $\epsilon$  є властивістю агентів і позначає відносну швидкість, за допомогою якої окремі дії змінюють стан навколишнього середовища. Модель відрізняється тим, що матриця виплат  $A(n)$  залежить від навколишнього середовища, а стратегія та динаміка навколишнього середовища пов'язані між собою (див. Рисунок 1). Стан навколишнього середовища характеризується скалярним значен-

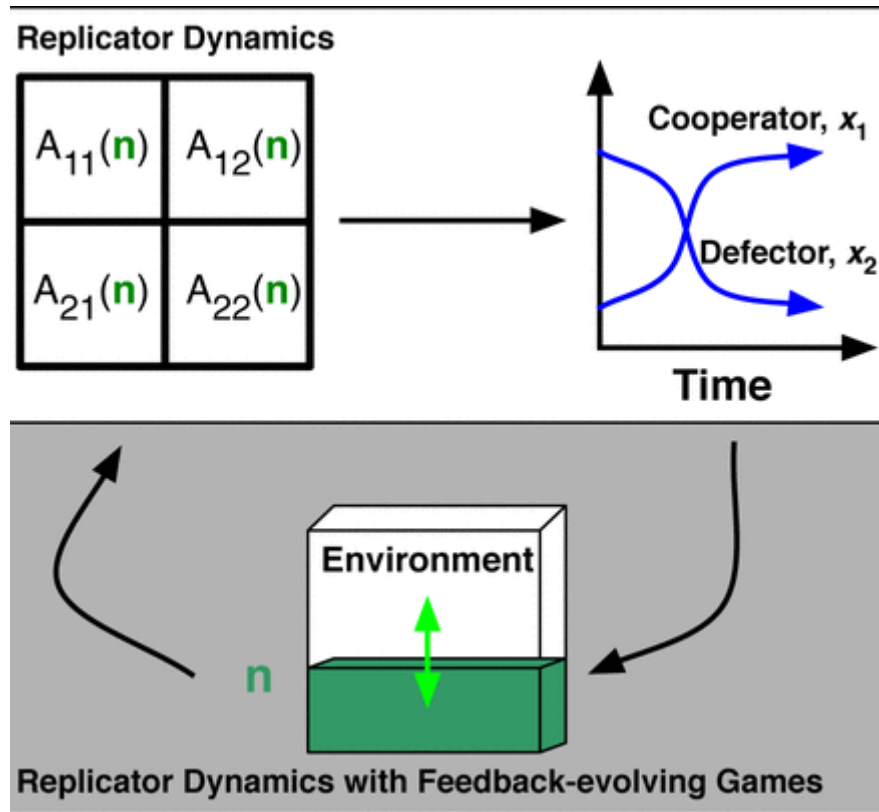


Рис. 1. Схематичне зображення реплікатора у середовищі зі стороннім зв'язком. Зліва зверху матриця виплат  $A$ , що задає залежні від частоти зміни в стратегіях. Справа – зміна стратегій за реплікатором. Знизу – динаміка середовище-реплікатор-стратегія

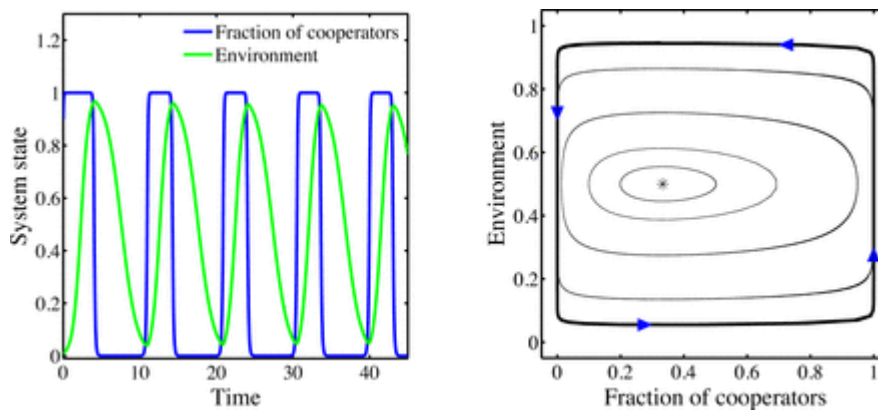
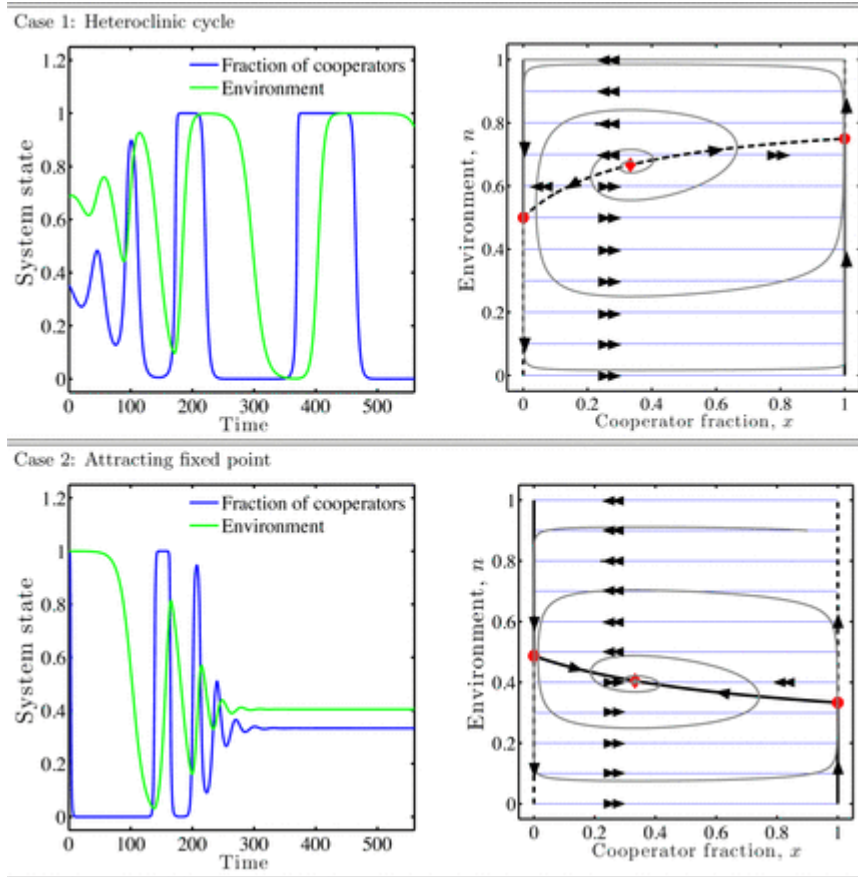


Рис. 2. Постійні коливання стратегій та середовища. Ліворуч – часовий ряд частки кооператорів  $x$  (синій) та стан середовища  $n$  (зелений) відповідають динаміці, що впливає з формули (3) з  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\theta = 2$  та виплатами  $R = 3$ ,  $S = 0$ ,  $T = 5$  та  $P = 1$ . Праворуч – динаміка фазової площини системи  $x - n$ . Стрілки позначають напрямки динаміки з часом. Окремі криві відповідають початковим умовам  $(0,9,0,01)$ ,  $(0,8,0,15)$ ,  $(0,7,0,3)$ ,  $(0,5,0,4)$ ,  $(0,4,0,45)$ .

ням,  $n$ . Стан навколишнього середовища змінюється в результаті дій стратегій, так що знак  $f(x)$  позначає, чи збільшиться чи зменшиться  $n$ , що відповідає погіршенню чи покращенню навколишнього середовища, якщо  $f < 0$  або  $f > 0$  відповідно. Нарешті, швидкість екологічної динаміки

частково визначається безрозмірною кількістю  $\varepsilon$ , так що коли  $0 < \varepsilon \ll 1$ , то зміна навколишнього середовища є відносно повільною у порівнянні зі зміною стратегій.

При цьому матриця виплат має наступний вигляд:



**Рис. 3.** Швидка-повільна динаміка гри зі зворотнім зв'язком, де  $x$  та  $n$  це повільні та швидкі змінні відповідно – включаючи критичні розгортки та набуті динаміки. На обох діаграмах чорні лінії позначають критичні розгортки атракторів суцільними лініями а штриховкою – “відлякуючі” атрактори. Сині лінії та подвійні стрілки позначають очікувану швидку динаміку в межі  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Червоні кола позначають точки біфуркації швидкої підсистеми, параметризовані  $n$ . Поодинокі стрілки позначають очікувану повільну динаміку. Сіра крива позначає набуту орбіту. В обох верхніх діаграма  $\varepsilon = 0.1$  and  $\theta = 2$ . Затухаючі коливання, що збігаються до гетероклінічного циклу виникають через седлоподібну біфуркацію швидкій підсистемі за параметром  $n$  з “відлякуючим” атрактором. Матриця виplat  $A$  задається формулою 21. Знизу – затухаючі коливання, що збігаються до гетероклінічного циклу виникають через седлоподібну біфуркацію швидкій підсистемі за параметром  $n$  з “притягуючим” атрактором. Матриця виplat  $A$  задається формулою 23

$$A(n) = (1-n) \begin{bmatrix} T & P \\ R & S \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} R & S \\ T & P \end{bmatrix} \quad (2)$$

При цьому ми вважаємо що  $R < S$  і  $T > P$ .

Тоді осцилююча модель буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) [\delta_{PS} + (\delta_{TR} - \delta_{PS})x] (1-2(n)), \\ \dot{n} &= n(1-n) [-1 + (1+\theta)x] \end{aligned} \quad (3)$$

При таких умовах існують п'ять фіксованих точок. Чотири з них представляють «граничні» нерухомі точки:

- 1)  $(x^* = 0, n^* = 0)$  – «уникаючі» стратегії в спустошеному середовищі;
- 2)  $(x^* = 0, n^* = 1)$  – «уникаючі» стратегії в наповненому середовищі;

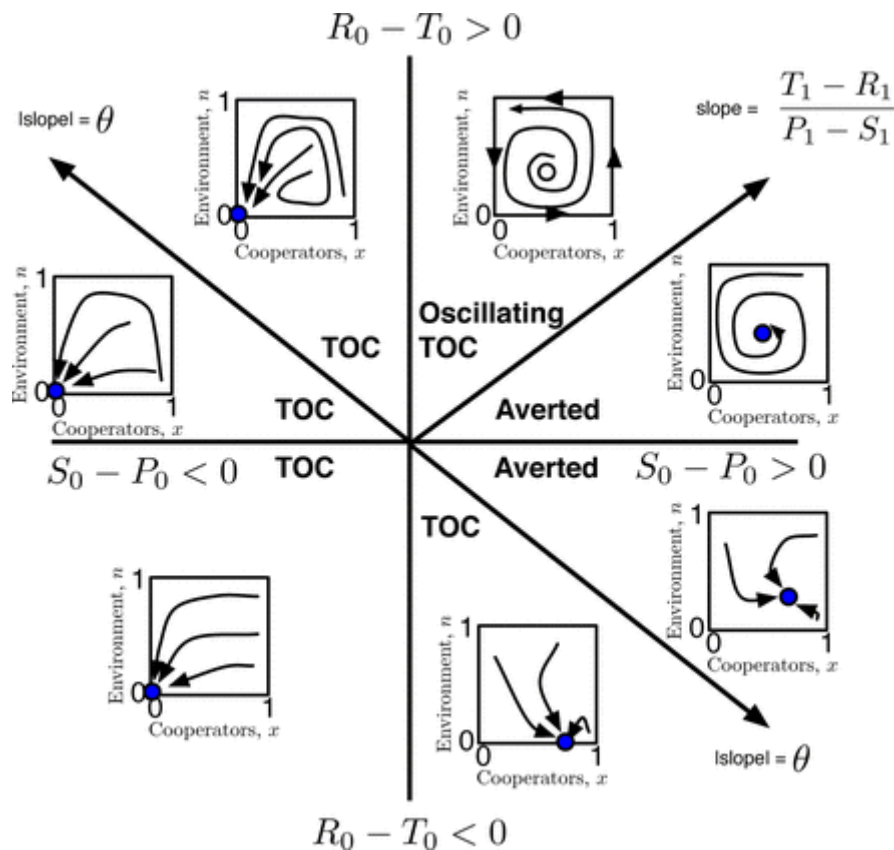
3)  $(x^* = 1, n^* = 0)$  – кооперативні стратегії в спустошеному середовищі

4)  $(x^* = 1, n^* = 1)$  – кооперативні стратегії в наповненому середовищі.

### Висновки

У наданій публікації було проаналізовано існуючі дослідження використання коеволюційної теорії ігор в контексті аналізу проблем біології на прикладі гри «голуб-яструб» в контексті вакцинації, було оглянуто розроблену модель осцилюючої еволюційної гри трагедії спільноти. Оглянуто вектори використання подібних моделей для аналізу поведінки бактеріологічних культур.

Поширення поточної моделі на мікробні та людські соціальні системи може поглибити розуміння короткострокових та довгострокових наслідків окремих дій у мінливому та мінливому середовищі



**Рис. 4.** Інваріантність динаміки системи з огляду на зміну відносної швидкості стратегії та динаміки навколишнього середовища. Параметр  $\epsilon$  змінюється від 0,1 до 10 у тих випадках, коли очікується, що динаміка призведе до гетероклінічного циклу (зліва) та до внутрішньої нерухомої точки (праворуч). Хоча перехідна динаміка відрізняється, якісна динаміка залишається інваріантною щодо змін  $\epsilon$

#### Список літератури:

1. Weitz J. S. An oscillating tragedy of the commons in replicator dynamics with game-environment feedback // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016. URL: <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/043299v2.full>.
2. Bissonette A. Coalitions in theory and reality: A review of pertinent variables and processes. URL: [https://escholarship.org/content/qt6zf593zz/qt6zf593zz\\_noSplash\\_8f4042abae1ade9ba432beec18e0f937.pdf?t=obxr66](https://escholarship.org/content/qt6zf593zz/qt6zf593zz_noSplash_8f4042abae1ade9ba432beec18e0f937.pdf?t=obxr66).
3. Frank, S. Foundations of Social Evolution // Princeton University Press, Princeton. 1998.
4. West, S. A., Griffin, A. S., Gardner, A. & Diggle, S. P. Social evolution theory for microorganisms. // Nat Rev Microbiol 4, 597–607 – 2006.
5. Bauch, C. T. & Earn, D. J. D. Vaccination and the theory of games. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. National Academy of Sciences of the United States of America 101, 13391–13394. 2004.
6. Stewart, A. J. & Plotkin, J. B. Collapse of cooperation in evolving games. // Proceedings of the National Academy of Sciences 111, 17558–17563. 2014.
7. Fazli M. A. Coalitional Game Theory URL: <http://ce.sharif.edu/courses/95-96/1/ce835-1/resources/root/Slides-Notes/5-CoalitionalGameTheory.pdf>.
8. Evolutionary Game Theory. Berlin: Springer, 2017.
9. Skibski O. The Stochastic Shapley Value for coalitional games with externalities // Games and Economic Behavior. 2018. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0899825617300726>.

**Baryshych L.M., Baklan I.V. REPLICATOR DYNAMICS WITH FEEDBACK-EVOLVING GAMES: TOWARDS A CO-EVOLUTIONARY GAME THEORY**

*The publication analyzes existing research on the use of coevolutionary game theory in the context of analyzing the problems of biology on the example of the game "pigeon-hawk" in the context of vaccination, reviewed the developed model of oscillating evolutionary game of community tragedy. Vectors of use of similar models for the analysis of behavior of bacteriological cultures are considered.*

*The proposed model of replicator dynamics for feedback games considers the effects of repetition when repetitive actions of the game affect the environment. Here, individual agents do not play against each other repeatedly or, in other words, do not "remember" how they have repeatedly played against each other. Instead, the game that develops with feedback changes over time as a direct result of the accumulated actions of agents. Until now, we have assumed that the environment can recover from an almost depleted state. The rate of recovery was considered proportional to the share of the cooperator. In this sense, our work also points to new opportunities for control – whether recovery or resource constraints.*

*This publication will look at a unified approach to analyzing and understanding games that develop with feedback. This approach is called by the inventors "coevolutionary game theory", which refers to the related evolution of strategies and environment. A key conceptual innovation of this approach is the expansion of the replicator dynamics, including dynamic changes in the environment. In this sense, this approach complements recent attempts to consider the evolution of benefits in a fixed environment [5]. Here, changes in the environment modulate payments. With this assumption, we can analyze problems in which the individual behavior of the agent is an integral part of the system. To study a specific case, we return to the tragedy that arose in the example of public use, and ask: what will happen if the overuse of the resource changes the incentives for future actions of players? As researchers have shown, the accumulated feedback from decisions can subsequently change payments, leading to new dynamic phenomena and new challenges for control.*

**Key words:** *game theory, community tragedy, evolutionary games, coevolution, replicator dynamics.*